ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 1

Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* [da *Karl Friedrich Gauss* (*1777-1855*)]. Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2004

PROBLEMA 1

1. La funzione $f(x) = ke^{-\lambda x^2}$, $k > 0$, $\lambda > 0$, è definita e positiva su tutto $\mathbb{R}$.
$f(-x) = f(x)$, la funzione è pari. Il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Il grafico interseca l'asse delle ordinate nel punto $M(0, k)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

La retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale. Non ci sono altri asintoti.
Derivata prima: $f'(x) = -2\lambda k x e^{-\lambda x^2} > 0$, se $x < 0$. Lo schema di figura 1 mostra che la funzione ha un massimo in $x = 0$. $f(0) = k$, allora $M(0, k)$ è un punto di massimo assoluto per il grafico della funzione.

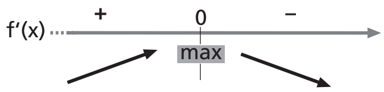

Figura 1.

Derivata seconda: $f''(x) = -2\lambda k e^{-\lambda x^2} - 2\lambda k x(-2\lambda x e^{-\lambda x^2}) = 2\lambda k e^{-\lambda x^2}(2\lambda x^2 - 1) > 0$, se $(2\lambda x^2 - 1) > 0$, che si ottiene per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$. La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto per $x < -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ e rivolta verso il basso per $-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ (figura 2).

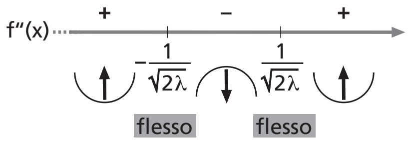

Figura 2.

Il grafico della funzione presenta due punti di flesso $F_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$ e $F_2\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}; ke^{-\frac{1}{2}}\right)$.

L'andamento del grafico della funzione (ponendo, per esempio $k = \lambda = 1$) è rappresentato in figura 3. All'aumentare del valore di k aumenta il valore massimo della funzione; all'aumentare del valore di λ la forma "a campana" della curva si restringe.

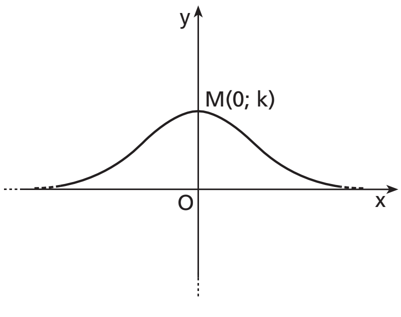

Figura 3.

2. Con riferimento alla figura 4, detta x l'ascissa del punto B, per ragioni di simmetria i vertici del rettangolo saranno: $A(-x; 0)$, $B(x; 0)$, $C(x; f(x))$, $D(-x; f(-x))$. La funzione è pari, $f(-x) = f(x)$, quindi l'area del rettangolo $ABCD$ vale $y = 2x \cdot f(x) = 2kxe^{-\lambda x^2}$, con $x > 0$.

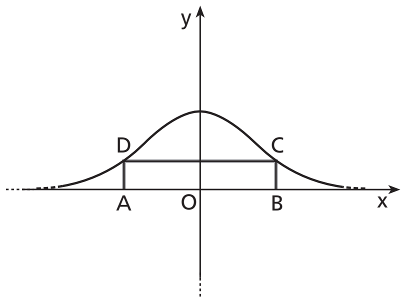

Figura 4.

$$y' = 2ke^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2) > 0, \text{ se } 0 < x < \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

Lo schema di figura 5 mostra che l'area del rettangolo $ABCD$ è minima per $x = 0$, massima per $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè quando i punti C e D coincidono con i flessi. L'area massima vale $2\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\,ke^{-\frac{1}{2}}$.

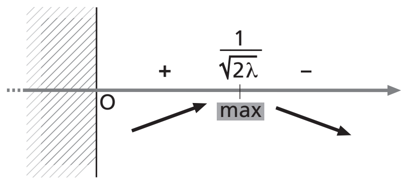

Figura 5.

3. L'area compresa tra γ e l'asse x, posto $\lambda = \frac{1}{2}$, risulta:

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx,$$

ponendo $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$ e quindi $dx = \sqrt{2}\cdot dt$ si ottiene:

$$\boldsymbol{A} = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\sqrt{2}\cdot dt = \sqrt{2}\,k\sqrt{\pi},$$

da cui $\boldsymbol{A} = 1$ se $k\sqrt{2\pi} = 1$, dunque $k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ è il valore cercato.

4. La normale di Gauss ha equazione generale $y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Un aumento dello scarto quadratico medio σ determina una diminuzione del valore di k e quindi diminuisce l'ordinata del punto di massimo. Inoltre la forma della curva diventa più "piatta" ed aumenta la dispersione rispetto al valore medio (figura 6). Se la media μ è diversa da zero la curva risulta traslata rispetto all'asse delle x di una quantità pari a μ (figura 7).

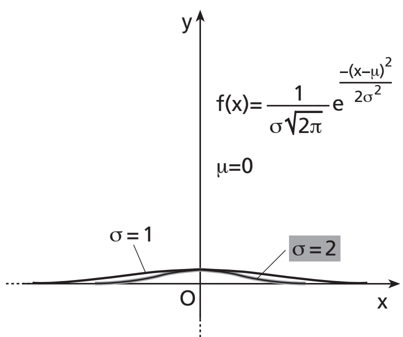

Figura 6.

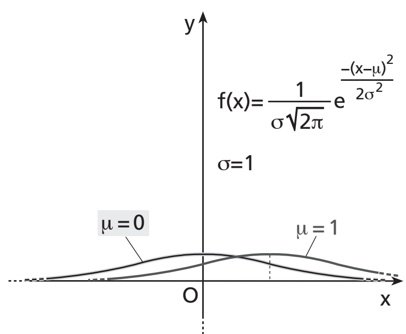

Figura 7.